C/ 1. a. Déterminer une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

b. Montrer que pour $x \geq 1$, $f(x) \leq \dfrac{\ln x}{x}$.

2. Soit F la primitive de f sur $[1,+\infty[$ qui s'annule en 1.

Sans chercher à calculer $F(x)$, montrer que pour $x \geq 1$, $F(x) \leq \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

22 Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Déterminer la fonction dérivée de f.

b. Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$.

2. Etudier f et tracer (C).

3. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Tracer la courbe de la fonction f^{-1}.

c. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

En déduire $\displaystyle\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} f^{-1}(x)dx$.

23 On pose pour tout entier $p \geq 1$, $I_p = \displaystyle\int_1^e x^2 (\ln x)^p dx$.

a. Montrer que la suite (I_p) est décroissante.

b. Montrer que la suite (I_p) vérifie la relation de récurrence $I_{p+1} + \dfrac{p+1}{3} I_p = \dfrac{e^3}{3}$

c. Calculer I_1 et I_2.

2. Montrer que pour tout $p \geq 1$, $\dfrac{e^3}{p+4} \leq I_p \leq \dfrac{e^3}{p+3}$

Calculer alors $\lim\limits_{p\to+\infty} I_p$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} pI_p$.

24 Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(\ln x)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.

2. Etudier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.

3. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$ avec $n \geq 2$.

Montrer que pour tout entier $k \geq 2$ $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \frac{1}{k \ln k}$.

4. Calculer $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln t} dt$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

25 1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on a $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

2. a. Montrer que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b. On pose $P_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\times\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\times\ldots\times\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

26 Pour tout réel a, on désigne par f_a la fonction définie par $f_a(x) = \ln\left(x^2+a\right)$.

1. a. Indiquer, suivant les valeurs de a, l'ensemble de définition de f_a.

b. Donner les différents tableaux de variations de f_a selon les valeurs de a.

c. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_a(x)}{x}$, en déduire la nature des branches infinies des courbes représentatives de f_a dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

d. (C_a) et $(C_{a'})$ désignant les courbes des fonctions f_a et $f_{a'}$ (avec $a \neq a'$).

Soit M un point de (C_a) et M' le point de $(C_{a'})$ de même abscisse.

Montrer que MM' est non nul.

Oarray.tn - Aqra Blech - Oarray.tn